

МАТЕМАТИЧКА АКАДЕМИЈА



Припреме за пријемни испит из математике
за упис на факултет

АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

Теоријски увод

Аритметички низ

- Низ бројева a_1, a_2, \dots је аритметички низ (прогресија) ако је

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Број d је *разлика* аритметичког низа.

- За општи члан a_n аритметичког низа важи да је

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

- За збир првих n чланова аритметичког низа, у ознаци S_n , важи да је

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d).$$

- Важи да је

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad n \geq 2, k < n.$$

Геометријски низ

- Низ бројева a_1, a_2, \dots је геометријски низ (прогресија) ако је

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}, a_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Број q је *количник* геометријског низа.

- За општи члан a_n геометријског низа важи да је

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

- За збир првих n чланова геометријског низа код којег је $q \neq 1$, у ознаци S_n , важи да је

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- Важи да је

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}, \quad n \geq 2, k < n.$$

- Ако је $|q| < 1$, онда важи да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Задаци

- (ЕТФ 2012) Израчунати збир првих 2012 чланова аритметичког низа $\frac{2011}{2012}, \frac{2010}{2012}, \frac{2009}{2012}, \dots$
- (ФОН 2015) Дат је аритметички низ a_1, a_2, a_3, \dots . Ако је $2a_2 - a_4 + a_5 = 19$ и $a_6 + a_7 = 43$, израчунати збир $a_{22} + a_{23} + \dots + a_{30}$.
- (МАТФ 2019) Ако за аритметички низ (a_n) важи $a_1 + a_7 = 22$ и $a_3 a_4 = 88$, израчунати a_7 .
- (ЕТФ 2017) У аритметичкој прогресији важи да је $a_{54} = \alpha$ и $a_{70} = \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta)$. Израчунати збир првих 160 чланова те прогресије.
- (ФОН 2012, МАТФ 2014) Ако је количник десетог и другог члана растуће аритметичке прогресије једнак 5, а збир квадрата прва три члана те прогресије једнак 56, израчунати 2012-ти члан те прогресије.
- (МАТФ 2013) Збир првих пет чланова аритметичке прогресије је 180, а збир првих осам чланова је 204. Колико првих чланова треба сабрати да се добије збир 185?
- (МАТФ 2020) Збир првих 5 чланова неконстантног аритметичког низа једнак је збиру првих 8 његових чланова, а производ прва 3 члана тог низа једнак је производу првих 6 његових чланова. Израчунати производ прва три члана низа.
- (ФОН 2023) За чланове аритметичког низа a_1, a_2, a_3, \dots важи једнакост $a_4 + a_5 + a_{11} + a_{12} = 32$. Израчунати збир првих 15 чланова тог низа.
- (МАТФ 2021) Ако је S_n збир првих n чланова аритметичке прогресије и важи да је $\frac{S_3}{S_5} = \frac{1}{2}$, израчунати $\frac{S_7}{S_{21}}$.
- Дат је низ $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 11, a_5 = 18, \dots$, такав да разлике узастопних чланова образују аритметички низ. Израчунати a_{500} .
- (ФОН 2016) Дат је геометријски низ a_1, a_2, a_3, \dots . Ако је $a_5 - a_2 = 756$ и $a_2 + a_3 + a_4 = 252$, израчунати $a_1 + a_2$.
- (ФОН 2020) За чланове геометријског низа a_1, a_2, a_3, \dots чији су сви чланови позитивни, важи $a_3^3 + a_7 = 2a_4^2$ и $a_5 = 2a_2 + 3a_3$. Израчунати збир првих десет чланова овог низа.
- (ФОН 2019) Ако је збир три броја који су узастопни чланови растућег геометријског низа једнак 42, а збир њихових реципрочних вредности једнак $\frac{21}{32}$, израчунати производ та три броја.
- (МАТФ 2018) У аритметичком низу са различитим члановима, први, трећи и седми члан образују геометријски низ. Ако је збир другог и шестог члана аритметичког низа једнак 70, израчунати десети члан тог низа.
- (ЕТФ 2013) Збир прва три члана растуће аритметичке прогресије је 54. Ако од првог члана те прогресије одузмемо 3, други члан остане непромењен, а трећем члану додамо 12, добијамо прва три члана геометријске прогресије. Израчунати количник те геометријске прогресије.

16. (ФОН 2017) Ако је a_1, a_2, a_3, \dots опадајући геометријски низ чији је збир прва три члана 28 и ако су $a_1, a_2, a_3 - 4$ прва три члана неког аритметичког низа, израчунати збир прва четири члана тог аритметичког низа.
17. (МАТФ 2016) Испитати да ли је низ чија су прва три члана бројеви $2, \sqrt{6} - \sqrt{2}$ и $4 - 2\sqrt{3}$ аритметички, геометријски или ниједан од тих.
18. (МАТФ 2017) Израчунати збир првих 100 чланова низа $1, 1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, \dots, 2^n, \frac{1}{2^n}, \dots$
19. (ЕТФ 2011) Израчунати збир бесконачне геометријске прогресије

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

20. (ЕТФ 2022) Сума бесконачне опадајуће геометријске прогресије са позитивним члановима износи $\frac{9}{2}$. Ако је сума квадратних корена чланова те прогресије једнака 3, израчунати количник прогресије.
21. (ЕТФ 2023) У коцку K_1 ивице 1 cm уписана је лопта L_1 , затим је у лопту L_1 уписана коцка K_2 , затим у њу лопта L_2 и затим се поступак наставља на исти начин. Израчунати збир површина свих коцки $K_n, n \in \mathbb{N}$.

Задаци за вежбање

1. (ЕТФ 2015) Дата је аритметичка прогресија a_1, a_2, \dots за чију разлику d важи да је $d = 1$, а збир првих 98 чланова $a_1 + a_2 + \dots + a_{98}$ једнак је 137. Израчунати збир $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}$.
2. (ФОН 2014) Збир првих девет чланова аритметичке прогресије је за 164 већи од збира првих пет чланова те прогресије. Ако је девети члан за 14 мањи од двоструке вредности шестог члана, израчунати производ прва два члана дате прогресије.
3. (МАТФ 2011) Збир другог и једанаестог члана аритметичког низа је 28. Израчунати збир трећег, петог, осмог и десетог члана тог низа.
4. (ФОН 2013) Дата је геометријска прогресија a_1, a_2, a_3, \dots . Ако је $a_1 + a_7 = \frac{65}{16}$ и $a_2 + a_8 = \frac{65}{32}$, израчунати $\frac{a_3}{a_{13}}$.
5. (ФОН 2022) За чланове растућег геометријског низа a_1, a_2, a_3, \dots важе једнакости $a_1^3 = 2a_2$ и $\frac{a_4}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} = 2$. Израчунати производ првих пет чланова датог низа.
6. (ЕТФ 2016) У растућој аритметичкој прогресији од 11 чланова, први, пети и једанаести члан чине прва три члана геометријске прогресије. Ако је први члан те аритметичке прогресије једнак 24, израчунати збир свих чланова те аритметичке прогресије.
7. (ФОН 2021) Нека је a_1, a_2, a_3, \dots аритметичка прогресија са међусобно различитим члановима. Ако су a_1, a_6 и a_{10} узастопни чланови неке геометријске прогресије, израчунати вредност израза $\frac{a_{2021}}{a_1}$.
8. (ФОН 2018) Реални бројеви a, b и c , чији је збир једнак 19, чине растући геометријски низ. Ако бројеви a, b и $c - 1$ чине аритметички низ, израчунати $c \cdot (a + b)^{-1}$.

9. (ЕТФ 2020) Фигура F_1 добијена је тако што је из једнакостраничног троугла чија је површина P избачен троугао чија су темена средишта страница полазног троугла. Фигура F_1 се састоји из 3 троугла. Фигура F_2 добијена је тако што су из фигуре F_1 избачена три троугла чија су темена средишта страница три троугла који чине фигуру F_1 . Фигура F_2 се састоји из 9 троуглова. Фигура F_{n+1} добијена је тако што је из фигуре F_n избачено $3n$ троуглова чија су темена средишта страница $3n$ троуглова који чине фигуру F_n . Израчунати збир површина свих фигура F_n , $n \in \mathbb{N}$, добијених на описани начин.