МАТЕМАТИЧКА АКАДЕМИЈА

Додатна настава и припреме за такмичења
из математике

8. разред

КОНГРУЕНЦИЈЕ ПО МОДУЛУ II

1. За сваки природан број n број $n^3 + 11n$ је дељив са 6. Доказати.
2. Одредити све природне бројеве n за које је број $2^n - 1$ дељив са 7. Доказати да не постоји природан број n такав да је број $2^n + 1$ дељив са 7.
3. Одредити све просте бројеве p за које је број $2^{p^2} + 1$ дељив са 13.
4. За сваки природан број n бар један од бројева $3^{3n} + 2^{3n}$ и $3^{3n} - 2^{3n}$ је дељив са 35. Доказати.
5. Доказати да за сваки природан број n важи да број $5^{2n-1} - 1$ није дељив са бројем $4^n - 1$.
6. Ако су x и y природни бројеви који нису дељиви са 3, онда је број $x^6 - y^6$ дељив са 9. Доказати.
7. Природан број n и збир његових цифара имају исти остатак при дељењу са 9. Доказати.
8. Збир цифара броја 9^{5000} је a. Збир цифара броја a је b, а збир цифара броја b је c. Одредити c.
9. (ЈБМО 1999) Ако је $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$, одредити највећи заједнички делилац бројева A_n, где је $0 \leq n \leq 100$.
10. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 6 \cdot 10^{500}$ нема решења у скупу природних бројева.
11. Одредити најмањи природан број облика $|53^k - 37^l|$, где су k и l природни бројеви.

Задаци за самосталан рад

1. Одредити све природне бројеве n за које је број $3n^2 + 3n + 7$ дељив са 5.
2. Ниједан од бројева a, b, c, d и e није дељив са 5, а њихов збир је дељив са 5. Доказати да је збир петих степена ових бројева дељив са 5.
3. Одредити сва решења једначине $x^3 + y^3 + z^3 = 50000$ у скупу природних бројева.