МАТЕМАТИЧКИ МАРАТОН

М
МАТЕМАТИЧКА
АКАДЕМИЈА
А

2022.

МАТЕМАТИЧКИ МАРАТОН

Математички маратон је такмичење из математике намењено ученицима од петог до осмог разреда основних школа који воле математику и изазове решавања занимљивих проблема. Такмичари решавају највише 60 задатака током једног дана, са освртом на разред који похађају:

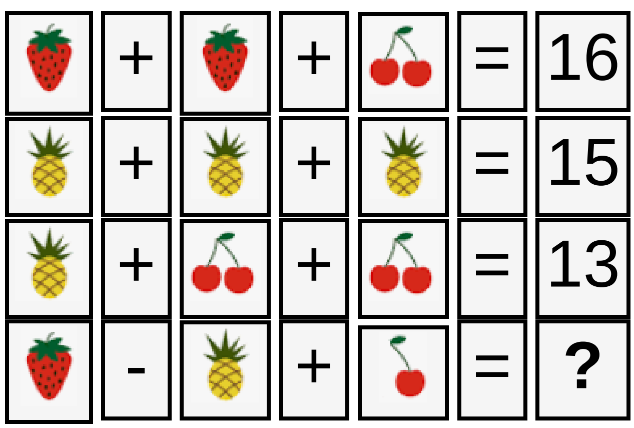
- 5. разред од 1. до 25. задатка
- 6. разред од 1. до 35. задатка
- 7. разред до 1. до 55. задатка
- 8. разред до 1. до 60. задатка

Решење сваког задатка пише се у форми једног природног броја. За сваког такмичара бодује се најдужи низ узастопних тачних задатака, па се на основу тога креира ранг листа учесника маратона.

Уколико више такмичара дели позицију на ранг листи, следећи критеријум је укупан број тачно решених задатака.

ЗАДАЦИ

1. Колико је $2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2 - 2$?
2. Колико је &, ако је $14 \cdot 15 \cdot 20 = 4 \cdot \& \cdot 35$?
3. Одредити број који треба да стоји уместо знака питања.

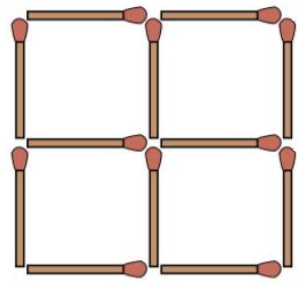


4. Дата квадратна мрежа може се допунити бројевима од 1 до 16 (сваки од бројева се користи тачно по једном) тако да збирови уписаних бројева у сваком реду, свакој колони и свакој великој дијагонали буду међусобно једнаки.

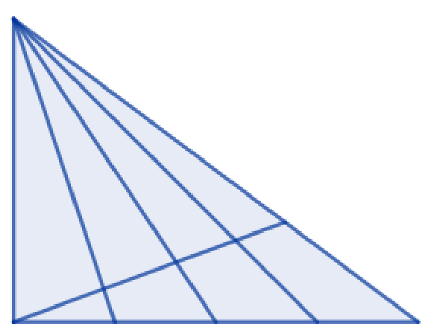
			2
		5	
1	11		
16		3	9

Колики је збир свих бројева у попуњеној мрежи?

5. Колико најмање палидрваца је довољно склонити тако да на слици остану тачно два квадрата?



6. Ако је $\overline{a7} \cdot \overline{2b} = \overline{4c8}$ колико је $a + b + c$?
7. На турниру учествује 5 играча и играју свако са сваким по једну партију. Колико ће се укупно партија одиграти на турниру?
8. Ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре, одредити цифру C, тако да је $\overline{ABCD} \cdot 9 = \overline{DCBA}$.
9. У кутији је 11 белих, 10 црвених и 9 плавих куглица. Колико куглица најмање треба извући тако да су са сигурношћу међу њима куглице обојене са бар две боје?
10. Користећи цифре 2, 3, 5 и 7, колико се може записати двоцифрених простих бројева?
11. Одредити најмањи троцифрен број који је дељив са 3, а при дељењу са 35 даје остатак 3.
12. Колико има двоцифрених природних бројева који при дељењу са 10 дају остатак 3?
13. Колико има четвороцифрених природних бројева дељивих са 4?
14. Који је највећи садржалац броја 9 који се може записати коришћењем цифара скупа {1, 3, 5, 7, 9} највише једном?
15. На тениском турниру је учествовало 256 такмичара. У свакој рунди се формирају парови и онај такмичар који победи наставља такмичење, док онај који изгуби завршава учешће. Колико мечева је одиграно док нису добијени финалисти?
16. Који је највећи делилац броја 170000 који не садржи цифре 0 и 5?
17. Одредити збир цифара највећег простог природног броја који је делилац броја 17234.
18. За колико природних бројева n је тачно један од бројева из скупа $\{n, n + 10\}$ троцифрен?
19. Колико троуглова има на слици?

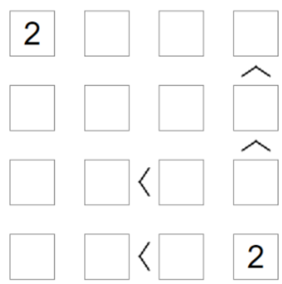


20. Дат је процес дељења

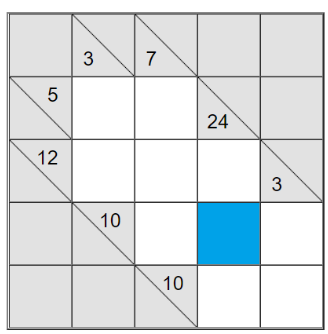
$$\begin{array}{cccccccccc}
 & * & * & 8 & * & : & * & 2 & = & 62\\
- & * & * & * & & & & & & \\ \hline
 & & & * & * & & & & & \\
 & & - & * & * & & & & & \\ \hline
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

Одредити цифру стотина дељеника.

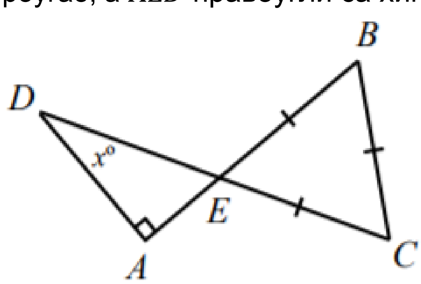
21. Пет жена за три дана направи 30 торти. Колико торти направи три жене за четири дана?
22. Колико има шестоцифрених природних бројева којима је збир цифара једнак 3?
23. У сваком реду и колони бројевне шеме треба да буду уписани сви природни бројеви од 1 до 4. Знаци неједнакости постављени између појединих суседних поља одређују однос између бројева у тим пољима. Колики је збир бројева у четири централна поља?



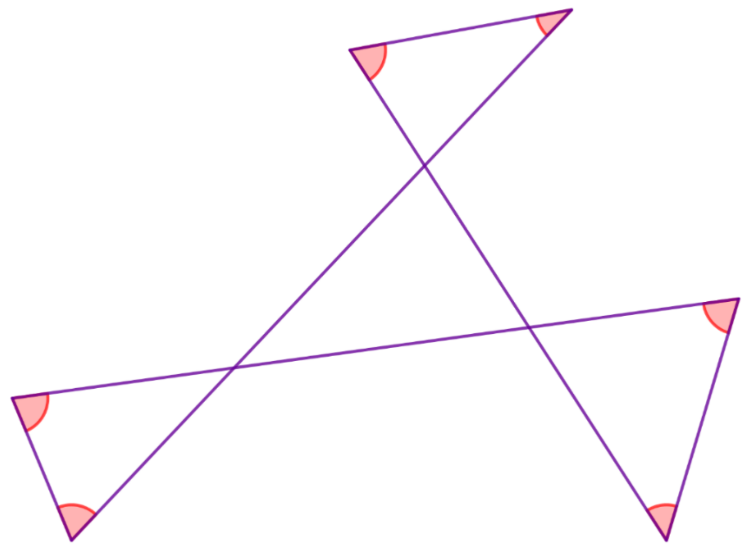
24. Дату математичку укрштеницу (КАКУРО) треба попунити природним бројевима тако да у сваком реду и колони буду различити бројеви и да број на почетку реда или колоне (у сивом пољу) означава збир записаних бројева у том реду. Који број треба уписати у означено плаво поље?



25. Ако природан број n даје остатак 4 при дељењу са 5, колики је највећи могући остатак при дељењу броја $2n$ са 15?
26. Ако је BEC једнакостранични троугао, а AED правоугли са хипотенузом ED, одредити број x.



27. Јовица је појео 60% пице, а Перица три петине остатка. Колико је још пице остало (у процентима)?
28. Колики је збир шест означених углова фигуре на слици?



29. Одредити збир бројиоца и имениоца следећег разломка у низу:

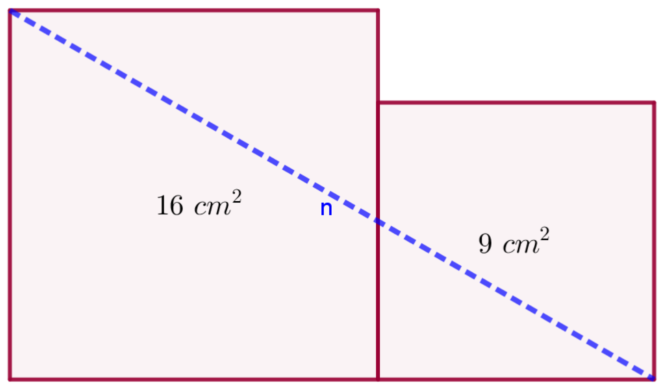
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{32}, ?$$

30. Колики је збир првих 180 децимала иза децималне запете разломка $\frac{7}{37}$?
31. Једнакокраки троугао има два од три унутрашња угла: $40°$ и $x°$. Колики је збир свих могућих вредности броја x?
32. Колики је мањи од углова који заклапају сатна и минутна казаљка у 7:22 сати?
33. Ако је $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ и $5! \cdot 9! = a \cdot b!$ и b је највећи природан број са тим својством, колико је $a + b$?
34. Постоји тачно 13 међусобно неподударних троуглова за које важи да су им мерни бројеви дужина страница цели и мањи од природног броја x. Одреди број x.
35. Ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре, одредити цифру *G*, тако да важи:

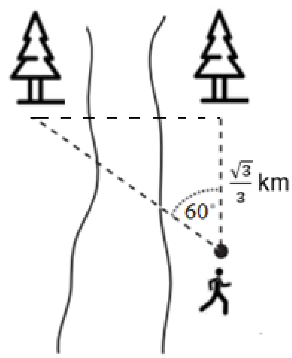
$$\begin{array}{cccccc} & & & A & B & C \\ & & & A & B & C \\ + & D & E & F & A & G \\ \hline & H & I & J & A & G \end{array}$$

36. Колико је x^4, ако је $\frac{x^2-4}{2} = \frac{24}{\frac{1}{2}}$?
37. Ако је 8% збира $x + y$ једнако 6, а x је позитиван паран број, колика је највећа могућа вредност броја y?
38. Одредити природан број x за који је $\sqrt{\sqrt{x^4\sqrt{x^2}}} = 32$.

39. Колика је дужина дужи n са слике, заокругљена на најближи број центиметара? Два дата четвороугла су квадрати са назначеним површинама.



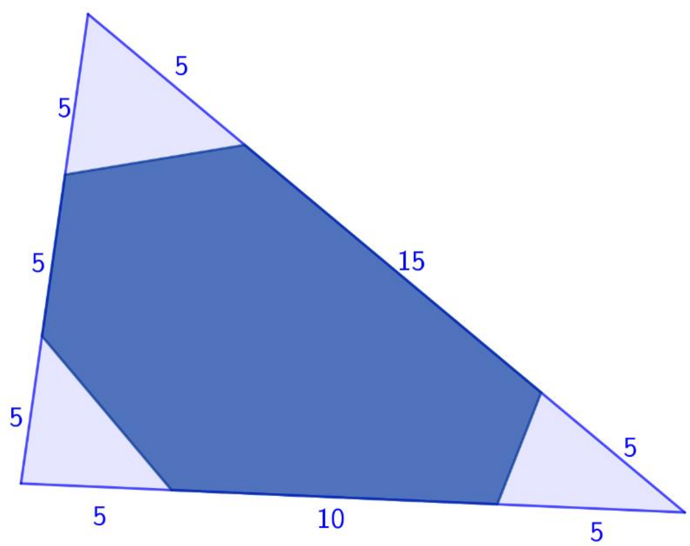
40. На основу датих података одредити растојање, изражено у километрима, између два дрвета уочена са различитих стране велике реке, као на илустрацији.



41. Која је последња цифра броја $3^{2022} + 7^{2023}$?
42. Који је најмањи природан број који није делилац броја $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 90 \cdot 91 = 91!$?
43. Колико има четвороцифрених природних бројева који се могу представити као збир тачно 12 различитих степена броја 2 са природним изложиоцем?
44. Који је најмањи природан број n такав да је број $n \cdot (20^2 + 64)$ потпун квадрат.
45. Одредити најмањи природан број n такав да је $n^{20} > 5^{30}$.
46. Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^2 + y^2 = 50$?
47. Код трапеза ABCD ($AB \parallel CD$) је $\angle ADC = 90°$, AD = 5, BC = 13 и DC = 18. Колика је његова најмања могућа површина?
48. За колико природних бројева n су код правилног многоугла који има n страница, сви унутрашњи углови оштри?
49. Ученик треба да полаже пријемни испит из математике на коме је дато 8 питања подељених у четири групе по два. Он је у обавези да одабере тачно 6 питања и то да из сваке од четири групе буде бар по једно питање. Колико различитих избора он може да направи?
50. Колико има парова (x, y) целих бројева за које је $(x - 4)^2 + (3 - y)^2 = 0$?

51. Дате су реченице:
    (1) Производ свака два ирационална броја је ирационалан број.
    (2) Разлика свака два ирационална броја је ирационалан број.
    (3) Количник свака два рационална броја је рационалан број.
    (4) Збир свака два рационална броја је рационалан број.

    Колико је међу тим реченицама тачних?
52. Колики је угао између најкраће и најдуже дијагонале из једног темена правилног осмогула?
53. На плафону једне сале има 14 сијалица. У једном потезу се мења стање неких тачно 5 сијалица. (Промена стања значи да она сијалица која је упаљена се угаси, а она која је угашена се упали). Ако су све сијалице угашене, са колико најмање потеза се може постићи да све буду упаљене?
54. Шест дечака се окупило са намером да играју баскет 3 на 3. На колико начина је могуће извршити поделу у две различите екипе по три играча?
55. Колико има простих бројева који се не могу представити као збир три различита сложена броја?
56. За који природан број x је $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)=3^x-2^x$?
57. Колико природних делилаца има број $4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$?
58. Седам људи треба да стане у хоризонтални ред за сликање, тако да Алекса и Бојана стоје једно до другог и Дамир и Елеонора стоје једно до другог. На колико различитих начина се они могу распоредити?
59. На слици је дат троугао чијим страницама припадају темена осенченог шестоугла. На основу датих података, израчунати површину тог шестоугла.



60. Одредити број целобројних решења једначине $x^2-xy+2x-3y=6$.