

# МАТЕМАТИЧКА АКАДЕМИЈА



Додатна настава и припреме за такмичења  
из математике

8. разред

## КОНГРУЕНЦИЈЕ ПО МОДУЛУ II

1. За сваки природан број  $n$  број  $n^3 + 11n$  је дељив са 6. Доказати.
2. Одредити све природне бројеве  $n$  за које је број  $2^n - 1$  дељив са 7. Доказати да не постоји природан број  $n$  такав да је број  $2^n + 1$  дељив са 7.
3. Одредити све просте бројеве  $p$  за које је број  $2^{p^2}$  дељив са 13.
4. За сваки природан број  $n$  бар један од бројева  $3^{3n} + 2^{3n}$  и  $3^{3n} - 2^{3n}$  је дељив са 35. Доказати.
5. Доказати да за сваки природан број  $n$  важи да број  $5^{2n-1} - 1$  није дељив са бројем  $4^n - 1$ .
6. Ако су  $x$  и  $y$  природни бројеви који нису дељиви са 3, онда је број  $x^6 - y^6$  дељив са 9. Доказати.
7. Ниједан од бројева  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  није дељив са 5. Доказати да је збир четвртих степена ових бројева дељив са 5.
8. Природан број  $n$  и збир његових цифара имају исти остатак при дељењу са 9. Доказати.
9. Збир цифара броја  $9^{5000}$  је  $a$ . Збир цифара броја  $a$  је  $b$ , а збир цифара броја  $b$  је  $c$ . Одредити  $c$ .
10. Ако је  $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ , одредити највећи заједнички делилац бројева  $A_n$ , где је  $0 \leq n \leq 100$ .
11. Доказати да једначина  $x^2 + y^2 = 6 \cdot 10^{500}$  нема решења у скупу природних бројева.
12. Одредити најмањи природан број облика  $|53^k - 37^l|$ , где су  $k$  и  $l$  природни бројеви.

### Задаци за самосталан рад

1. Одредити све природне бројеве  $n$  за које је број  $3n^2 + 3n + 7$  дељив са 5.
2. Ниједан од бројева  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  није дељив са 5, а њихов збир је дељив са 5. Доказати да је збир петих степена ових бројева дељив са 5.
3. Одредити сва решења једначине  $x^3 + y^3 + z^3 = 50000$  у скупу природних бројева.