∼∼∼ ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ ∼∼∼

Материјал за додатну наставу математике у седмом разреду.

Вељко Ћировић

1. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Пр. 1. Да ли је број $\sqrt{0,444...}$ рационалан или ирационалан?

▶ ***Решење.*** Представимо најпре број $0,444...$ у облику разломка (пошто је јасно да се то може учинити, јер има периодичан децимални запис). Нека је $x = 0,444...$. Помножимо ли обе стране са 10 биће $10x = 4,444...$. Одузмимо обема странама по $x = 0,444...$ и одатле је $9x = 4$, односно $x = \frac{4}{9}$. Па је $\sqrt{0,444...} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. Дакле, рационалан је. ◀

Пр. 2. Шта је веће: $7\sqrt{8}$ или $8\sqrt{7}$?

▶ ***Решење.*** Ако квадрирамо оба израза, добијамо: $(7\sqrt{8})^2 = 49 \cdot 8 = 392$ и $(8\sqrt{7})^2 = 64 \cdot 7 = 448$. Па је $8\sqrt{7} > 7\sqrt{8}$. ◀

Напомена. За позитивне реалне бројеве a и b важи: Ако је $a^2 < b^2$ онда је $a < b$.

Пр. 3. Израчунај вредност израза: $\sqrt{(\sqrt{7}-7)^2} - (\sqrt{7}-7)$.

▶ ***Решење.*** Обратимо пажњу на израз под кореном.

$$\sqrt{(\sqrt{7}-7)^2} - (\sqrt{7}-7) = |\sqrt{7}-7| - (\sqrt{7}-7) = ...$$

Дакле, с обзиром да је $\sqrt{7} < 7$, имаћемо:

$$... = -(\sqrt{7}-7) - \sqrt{7} + 7 = -2\sqrt{7} + 14.$$ ◀

Пр. 4. Покажи да је вредност израза $\frac{11\sqrt{3} - \sqrt{243} + 2\sqrt{75}}{3\sqrt{3}}$ природан број.

▶ ***Решење.*** Једноставним разлагањем неких поткорених величина у датом изразу добијамо:

$$\frac{11\sqrt{3} - \sqrt{243} + 2\sqrt{75}}{3\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} - \sqrt{81\cdot 3} + 2\sqrt{25\cdot 3}}{3\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 2\cdot 5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 4$$

Дакле, вредност овог израза је заиста природан број! ◀

Пр. 5. Реши једначину $|\sqrt{(x-2)^2}+3|=8$.

▶ ***Решење.*** С обзиром на дефиницију $\sqrt{a^2}=|a|$, ма шта ово a било, из једначине $|\sqrt{(x-2)^2}+3|=8$ добијамо једначину $||x-2|+3|=8$.

А одавде је: (1) $|x-2|+3=8$ или (2) $|x-2|+3=-8$.

Јасно је да једначина (2) нема решења, јер би било $|x-2|=-11$, а то је немогуће јер су апсолутне вредности ненегативне.

Дакле, решавамо прву. Из $|x-2|+3=8$ је $|x-2|=5$, тј. $x-2=5$ и $x-2=-5$. Коначно, решења једначине су $x_1=7$ и $x_2=-3$. ◀

Пр. 6. Одреди најмањи и највећи природан број x за који је број $\sqrt{51-\sqrt{x+1}}$ такође природан.

▶ ***Решење.*** Најмањи природан број x за који је број такође природан је $x=3$, а како број $51-\sqrt{x+1}$, због дефинисаности корена, мора бити ненегативан, највећи природан број x за који је број a природан је $x=50^1-1=2499$ (тада је = 1). ◀

Пр. 7. Докажи да је $\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}}>2$.

▶ ***Решење.*** Како је $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$, $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3$ и $\sqrt{17}>\sqrt{16}=4$ следи да је

$$\sqrt{1+\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}}>\sqrt{1+\sqrt{2+3+4}}=\sqrt{1+3}=2,$$

што је и требало доказати. ◀

Пр. 8. Одреди све целе бројеве x за које је број $\sqrt{\dfrac{x+25}{x-5}}$ квадрат неког природног броја. (Окружно такмичење 2016 - VIII)

▶ ***Решење.*** Како је $\sqrt{\dfrac{x+25}{x-5}}=\sqrt{\dfrac{x-5+30}{x-5}}=\sqrt{1+\dfrac{30}{x-5}}$, број под кореном би могао бити природан једино када је $(x-5)\mid 30$, то јест за $x-5\in\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, односно $x\in\{6,7,8,10,11,15,20,35\}$. Провером се једноставно утврђује да је једино за $x=7$ број $\sqrt{\dfrac{x+25}{x-5}}$ једнак квадрату природног броја 2: $\sqrt{\dfrac{7+25}{7-5}}=4=2^2$. ◀

Пр. 9. Дата су тврђења:

- (I) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број $x+y$ је ирационалан;
- (II) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број xy је ирационалан;
- (III) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број y^x је ирационалан.

Колико је међу њима тачних?

▶ ***Решење.*** Тачно је само прво тврђење. Друго није, јер на пример за $x=0$ и $y=\sqrt{2}$ је $xy=0\in\mathbf{Q}$. Треће тврђење, такође није тачно. Јер, на пример за $x=2$ и $y=\sqrt{2}$ је $y^x=2\in\mathbf{Q}$ ◀

2. ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

1. Докажи да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 23.
2. Одреди најмањи природни број n такав да је број $\sqrt{2020 \cdot n}$ рационалан.
3. Упрости израз $(\sqrt{13}+\sqrt{23})(\sqrt{23}-\sqrt{13})+2016$.
4. Шта је веће: $\sqrt{11}$ или $2\sqrt{3}$? Користећи добијени резултат израчунај вредност израза
$$\sqrt{(\sqrt{11}+2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{11}-2\sqrt{3})^2}.$$
5. Докажи да је $\sqrt{\left(\frac{11}{5}-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{11}{5}+\sqrt{5}\right)^2}<0$.
6. Упореди бројеве $6-\sqrt{6}$ и $2+\sqrt{2}$.
7. (I) Ако је $a=0,343434...$ и $b=0,888...$ израчунај колико је $a+b$;
(II) Да ли је број $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2$ рационалан или ирационалан?
8. На странама коцкице за игру написани су бројеви: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{7}, -\sqrt{11}, 7, \frac{2}{5}$. Никола баца коцку два пута и бележи производ добијених бројева. Колико разичитих резултата који су рационални бројеви може добити?
9. Докажи да је $\dfrac{5-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}{5+\sqrt{6+\sqrt{6}}}>\dfrac{1}{4}$.
10. Да ли је број $\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1}-1+\sqrt{5}$ рационалан или ирационалан?
11. Испитај тачност тврдње: $\dfrac{1}{\sqrt{101}}+\dfrac{1}{\sqrt{102}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{200}}>10$.