∼∼∼ РЕАЛНИ БРОЈЕВИ ∼∼∼

Вељко Ћировић

У материјалу је дат кратак теоријски осврт, затим сет решених задатака са неколико претходних пријемних испита на факултетима Универзитета у Београду, као и сет задатака за вежбу.

1 Теоријски осврт

• За цео број a кажемо да је **дељив** целим бројем b, различитим од 0, ако постоји цео број c такав да је $a = b \cdot c$. Притом, за број b кажемо да је **делилац** броја a, а за број a да је **садржалац** броја b.

• За сваки пар целих бројева a и $b \neq 0$ јединствено су одређени цели бројеви q и r, такви да је $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < |b|$. Број q је **количник** при дељењу броја a бројем b, а број r је **остатак** при том дељењу.

• Сваки природан број n може се на јединствен начин представити као производ простих бројева

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ прости, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ цели бројеви.

• Природан број n представљен у канонском облику $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ има укупно

$$\varphi(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

различитих делилаца у скупу природних бројева.

2 Решени задаци

1. Колики је збир цифара броја 13 у позиционом систему са основом 2? (МАТФ 2007.)

   Решење. Број 13 се у систему са основом два записује као 1101, па је тражени збир цифара једнак 3.

2. Ако за реалне бројеве a и b важи $(2a - b - 3)^2 + (3a + b - 7)^2 = 0$, колико је $3a - 7b$? (МАТФ 2008.)

Решење. Збир датих квадрата може бити једнак 0 једино када је $2a-b-3=0$ и $3a+b-7=0$. Решавајући тај систем једначина добија се да је $a=2$ и $b=1$, па је $3a-7b=-1$.

3. Одредити последњу цифру броја 7^{2009}. (МАТФ 2009.)

   Решење. Број 7^4 се завршава цифром 1, па се број $7^{2009}=(7^4)^{502}\cdot 7$ завршава цифром 7.

4. Која је 2010. цифра у децималном запису броја $\dfrac{2010}{7}$?

   Решење. Приметимо да је $\dfrac{2010}{7}=287,(142857)142857...$ Дакле, цифре иза децималне запете се понављају периодично у блоковима од по шест истих. Како је $2010=6\cdot 335$, то је тражена цифра једнака 7.

5. Скуп свих природних бројева разбијен је на групе на следећи начин:

   $$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},...$$

   Одредити збир свих бројева 99. групе. (МАТФ 2012.)

   Решење. Приметимо да $n-$тој групи припадају природни бројеви почев од $\dfrac{(n-1)n}{2}+1$ па наредних још $n-1$ бројева.

   Дакле, 99. група почиње бројем $\dfrac{(99-1)99}{2}+1=4852$ и завршава се бројем 4950. Тражени збир је једнак $4852+4853+\ldots+4950=99\cdot 4852+1+2+\ldots+98=480249+4851=485199$.

6. Дат је 2013-цифрени број $1234512345\ldots12345123$. У броју се, идући слева на десно, редом прецртавају све цифре на непарним местима. Непрецртане цифре у постојећем поретку чине нови број у коме се понавља исти поступак прецртавања. Овај се поступак понавља све док не буду прецртане све цифре. Која је цифра последња прецртана? (МАТФ 2013.)

   Решење. Приликом првог прецртавања биће прецртане цифре на позицијама $2n-1$, $n\in\mathbf{N}$, у датом броју.

   Приликом другог прецртавања биће прецртане цифре на позицијама $2(2n-1)$, $n\in\mathbf{N}$, док ће приликом n-тог прецртавања бити прецртане цифре на позицијама $2^{n-1}(2n-1)$, $n\in\mathbf{N}$ полазног броја.

   Како је $2^{10}<2013<2^{11}$, то закључујемо да ће бити обављено укупно 10 прецртавања цифара. Последња цифра која се прецртава је цифра на $2^{10}=1024$. месту, а то је цифра 4.

7. Периодични децимални број $2,727272\ldots$, чији се период састоји од две цифре, написан је у облику нескративог разломка. Одредити збир бројиоца и builds имениоца тог разломка. (МАТФ 2015.)

   Решење. Нека је $x=2,727272\ldots$. Одатле следи да је $100x=272,7272\ldots$. Одузимајући од обе стране последње једнакости број x добија се $99x=270$. Одатле је $x=\dfrac{270}{99}=\dfrac{30}{11}$, па је збир бројиоца и имениоца тог разломка једнак 41.

8. Двоцифрени завршетак природног броја a је 16. Ако број a није дељив са 8, тада је цифра јединица броја $\frac{3a}{4}$ једнака? (МАТФ 2016.)

   Решење. С обзиром да број није дељив са 8, то ни његов троцифрени завршетак није дељив са 8. А како је двоцифрени завршетак 16, то троцифрени завршетак мора бити $\overline{c16}$, где је c непарна цифра.

   Дакле, број a можемо представити као $a = (2n+1) \cdot 100 + 16$ за неки природан број n. Одатле се добија да је последња цифра броја $\frac{3a}{4}$ једнака последњој цифри броја $(2n+1) \cdot 75 + 12$. Број $(2n+1) \cdot 75$ је непаран и дељив са 5, па се завршава цифром 5, па је последња цифра траженог броја једнака 7.

9. Дата су тврђења:
   (1) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број $x + y$ је ирационалан;
   (2) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број xy је ирационалан;
   (3) за сваки рационалан број x и сваки ирационалан број y, број y^x је ирационалан.
   Колико је међу њима тачних тврђења? (МАТФ 2017.)

   Решење. Тврђење (1) је тачно. Претпоставимо супротно, да је број $x+y$ једнак неком рационалном броју z. Тада се из $x + y = z$ добија да је $y = z - x \in \mathbf{Q}$, што је контрадикција.

   Тврђење (2) није тачно. Контрапример: $x = 0$, $y = \sqrt{2}$, $xy = 0 \in Q$.

   Тврђење (3) није тачно. Контрапример: $x = 2$, $y = \sqrt{3}$, $y^x = 3 \in Q$.

10. Одредити највећи од бројева $2^{1/2}$, $3^{1/3}$, $4^{1/4}$, $5^{1/5}$, $6^{1/6}$. (МАТФ 2017.)

    Решење. Степенујући сваки од тих бројева са 60, долазимо до:

    $$(2^{1/2})^{60} = 2^{30}, \quad (3^{1/3})^{60} = 3^{20}, \quad (4^{1/4})^{60} = 4^{15}, \quad (5^{1/5})^{60} = 5^{12}, \quad (6^{1/6})^{60} = 6^{10}.$$

    Приметио да је $4^{15} = 2^{30} = 8^{10} < 9^{10} = 3^{20}$, као и $6^{10} = 2^{10} \cdot 3^{10} < 3^{10} \cdot 3^{10} = 3^{20}$. Остаје још да упоредимо 3^{20} и 5^{12}. Из $5^{12} = 125^4 < (3^5)^4 = 243^4 = 3^{20}$ следи да је број 3^{20} највећи, а тиме и $3^{1/3}$ од полазних бројева.

11. Колико има рационалних међу следећа четири броја:

    $$a = \sqrt{485} + 1, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad c = 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{1 - \sqrt{2}}, \quad d = \sqrt{27} - \sqrt{3} \ ?$$

    (МАТФ 2018.)

    Решење. Бројеве b и c можемо рационалисати:

    $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \in \mathbf{I}$, $c = 1 - \sqrt{2} - \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) = 2 \in \mathbf{Q}$.
    Број a је ирационалан као збир ирационалног и рационалног броја, а број d можемо записати као $d = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \in \mathbf{I}$.

    Дакле, само један од датих бројева је рационалан.

12. Ако су a и b цели бројеви, тада је вредност израза $\dfrac{6^{a+b}\cdot 12^{a-b}}{8^a\cdot 9^{a+2b}}$ цео број ако и само ако је:
(А) $b\le 0$, (Б) $b\ge 0$, (Ц) $b=0$, (Д) $a\ge b$, (Е) $a\le b$. (МАТФ 2018.)

Решење. С обзиром да је $\dfrac{6^{a+b}\cdot 12^{a-b}}{8^a\cdot 9^{a+2b}}=\dfrac{2^{a+b}\cdot 3^{a+b}\cdot 2^{2\cdot(a-b)}\cdot 3^{a-b}}{2^{3a}\cdot 3^{2(a+2b)}}=\dfrac{2^{3a-b}\cdot 3^{2a}}{2^{3a}\cdot 3^{2a+4b}}=\dfrac{1}{2^b\cdot 3^{4b}}$, тај број је цео акко је $b\le 0$.

13. Колико има петоцифрених бројева облика $\overline{a3cd2}$, чије су све цифре различите и који су дељиви са 4? (МАТФ 2019.)

Решење. Двоцифрени завршеци који, у овом случају, обезбеђују дељивост са 4 су 12, 52, 72 и 92. Дакле, цифра d може имати једну од четири вредности из скупа $\{1,5,7,9\}$. За сваку тако одабрану цифру d, преостаје 6 могућности за цифру a (све цифре осим 0, 3, 2 и одабране цифре d) и 6 могучности за цифру c (све цифре осим оне на првом месту, 3, 2 и d), па таквих бројева има $6\cdot 6\cdot 4=144$.

14. Нека су a, b и c произвољни природни бројеви. Колико је од следећих тврђења увек тачно:
(1) ако ab дели c, тада a дели c и b дели c;
(2) ако a дели c и b дели c, тада ab дели c;
(3) ако a дели b и b дели c, тада a дели c;
(4) $NZD(a,b)$ дели $a+b$? (МАТФ 2020.)

Решење. Ако ab дели c, то значи да постоји природан број k, такав да је $c=ab\cdot k$. Одатле следи да је $a\mid c$ и $b\mid c$, па је тврђење (1) тачно.

Тврђење (2) није тачно. Контрапример: $8\mid 32$ и $16\mid 32$, али $8\cdot 16\nmid 32$.

Ако a дели b и b дели c, следи да постоје природни бројеви m и n такви да је $b=am$ и $c=bn$, па је $c=amn$ одакле следи $a\mid c$. Тврјење (3) је тачно.

$NZD(a,b)\mid a$ и $NZD(a,b)\mid b$ па је $NZD(a,b)\mid(a+b)$. Дакле, тачно је и тврђење (4), па је међу понуђеним три тачна.

15. Уколико за реалне бројеве a, b и c важи $e^{ab}=c$, који од тих бројева могу да буду негативни? (ФФ 2020.)

Решење. Негативни могу бити бројеви a и b, док c не може јер је резултат степеновања позитивног броја.

16. Ако природни бројеви m, n и k при дељењу са 11 дају остатке 3, 9 и 1, редом, колики остатак при дељењу са 11 даје број $mk+n$? (ФФ 2020.)

Решење. Из датих услова је $m=11q_1+3$, $n=11q_2+9$ и $k=11q_3+1$. Одатле следи да је $mk+n=(11q_1+3)(11q_3+1)+11q_2+9=121q_1q_3+11q_1+33q_3+3+11q_2+9=11q+12$, за неки природан број q, па је остатак при дељењу тог броја са 11 једнак 1.

3 Задаци за вежбу

1. Колико се троцифрених бројева може записати у бројевном систему са основом

   а) 2;
   б) 8;
   в) 16;?

2. Нека су x и y, $x \neq 0$, $y \neq 0$, реални бројеви који задовољавају неједнакост $|x| < |y|$. Која од следећих тврђења су увек тачна?

   (1) $\dfrac{x}{y} < 1$, (2) $x^2 < y^2$, (3) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$, (4) $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{y^2}$, (5) $x < y$. (ЕТФ 2019.)

3. Колико има природних бројева $\overline{3xy7}$ дељивих са 9?

4. Колико има природних бројева $\overline{5xy6}$ дељивих са 11?

5. Одредити најмањи природан број који је дељив са 8 и при дељењу са 5, 6 и 7 даје остатак 1.

6. Може ли број $n!$ да се завршава са тачно 5 нула?

7. Колико има простих бројева p за које су прости и бројеви $p + 2$ и $p + 4$?